

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

РАСЧЕТ ФЕРМ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ЭВМ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний к курсовой и расчетной работе*

УДК 539. 3: 629. 7. 023

Составители: доц. В. И. Леонов,
доц. Ю. В. Скворцов

Рецензент канд. техн. наук В.К. Шадрин

Расчет ферм матричным методом перемещений на ЭВМ: метод. указания к курсовой и расчетной работе / сост. В. И. Леонов, Ю. В. Скворцов. – Самара: Изд-во СГАУ, 2007. - 26 с.

В методических указаниях по выполнению курсовой и расчетной работы по курсу строительной механики машин и летательных аппаратов рассматривается методика расчета на ЭВМ пространственных ферм матричным методом перемещений. Описана учебная программа, составленная на алгоритмическом языке Си, а также исходные данные, необходимые для проведения расчетов.

Предназначены для студентов специальностей 150301, 160201, 160801, 160802, 230301, изучающих курс строительной механики, подготовлены на кафедре прочности летательных аппаратов.

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

* * *

В связи с бурным развитием вычислительной техники в последние годы широкое распространение получили дискретные методы расчета сложных конструкций, базирующиеся на использовании универсальных матричных алгоритмов. В настоящей работе описана методика расчета пространственных статически неопределимых ферм матричным методом перемещений в трактовке, примыкающей к методу конечных элементов [1, 3, 4], применительно к учебной программе, составленной на алгоритмическом языке Си.

В методических указаниях [2] описана программа расчета ферм, составленная на алгоритмическом языке ФОРТРАН-4. Настоящие указания являются развитием работы [2] применительно к прог-рамме, написанной на языке Си, получившем в последнее десяти-летие наибольшее распространение. При этом добавлены удобный пользовательский интерфейс, графика и средства диагностики ошибок.

С целью улучшения проработки методики расчета в учебной программе предусмотрено кроме подготовки исходных данных составление студентами двух программных блоков, в которых применительно к своей конкретной задаче осуществляется формирование матрицы жесткости конструкции для двух стержней фермы с учетом наложенных на систему связей, что является одним из центральных моментов матричного метода расчета стержневых систем и метода конечных элементов [3, 4]. При наличии у студента ошибки ЭВМ выдает сообщение об этом и прекращает счет.

После получения результатов вычислений студент должен сделать проверку правильности расчета, составляя уравнения равновесия некоторых узлов. Кроме того, ему предлагается составить вручную матрицу жесткости одного стержня и по найденным на ЭВМ узловым перемещениям определить в нем усилие. Все это обеспечивает углубленную проработку всей методики расчета.

Методические указания состоят из двух разделов и приложения. В первом разделе приведены сведения из матричного метода перемещений, необходимые для выполнения работы. Во втором разделе описана учебная программа расчета

ферм, а также исходные данные, которые необходимо подготовить студенту для проведения расчетов. В приложении приведена распечатка результатов вычислений на ЭВМ.

1. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАСЧЕТУ ФЕРМ

1.1. Матрица жесткости ферменного элемента

Ферменным элементом называется прямолинейный стержень, который присоединяется к другим элементам посредством идеальных шарниров и не несет поперечных нагрузок. Поэтому он испытывает лишь растяжение или сжатие.

Выберем местные координаты для стержня таким образом, чтобы ось \bar{x} совпала с его продольной осью и была направлена от узла с меньшим номером к узлу с большим номером (рис. 1.1). Обозначим силы, приложенные к концам стержня (узлам) в направлении \bar{x} , через \bar{P}_i и \bar{P}_j а соответствующие им перемещения – через \bar{V}_i и \bar{V}_j [3]. Узловые силы и перемещения в местной системе координат образуют матрицы

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix}; \quad \bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{V}_i \\ \bar{V}_j \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Они связаны между собой зависимостью

$$\bar{P} = \bar{K} \cdot \bar{V}, \quad (1.2)$$

где

$$\bar{K} = \frac{Ef}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

(1.3)

– матрица жесткости ферменного элемента в местных координатах.

Здесь E – модуль упругости на растяжение; f – площадь сечения; l – длина стержня.

В выражении (1.3) для определенности указаны номера i и j строк и столбцов в соответствии с порядком расположения элементов в матрицах \bar{P} и \bar{V} .

Отнесем теперь ферменный элемент $i-j$ к общей для всей фермы системе координат x, y, z (рис. 1.2). Пусть оси стержня составляют с координатными осями углы, косинусы которых равны

$$\lambda_{\bar{x}x} = \frac{x_j - x_i}{l} = \frac{l_x}{l}, \quad \lambda_{\bar{x}y} = \frac{y_j - y_i}{l} = \frac{l_y}{l}, \quad \lambda_{\bar{x}z} = \frac{z_j - z_i}{l} = \frac{l_z}{l}, \quad (1.4)$$

где l_x, l_y, l_z – проекция стержня на координатные оси, а

$$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \quad (1.5)$$

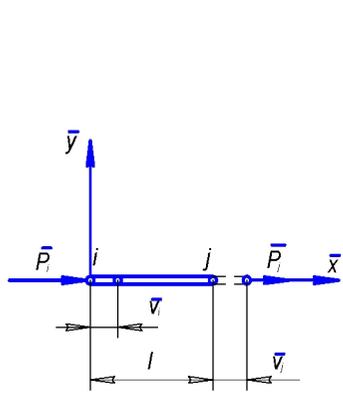


Рис. 1.1. Силы и перемещения для стержня в местной системе координат

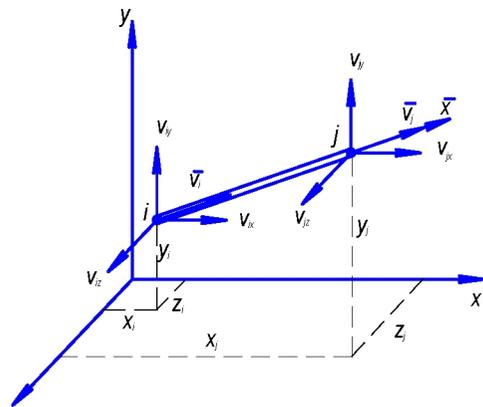


Рис. 1.2. Обозначения узловых перемещений стержня пространственной фермы

Перемещения каждого узла имеют составляющие по всем трем осям общей системы координат (рис. 1.2), поэтому в этой системе матрицы перемещений, а следовательно, и матрицы узловых сил будут иметь соответственно по три элемента:

$$V_i = \begin{bmatrix} V_{ix} \\ V_{iy} \\ V_{iz} \end{bmatrix}; \quad V_j = \begin{bmatrix} V_{jx} \\ V_{jy} \\ V_{jz} \end{bmatrix}; \quad P_i^{ij} = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \end{bmatrix}; \quad P_j^{ij} = \begin{bmatrix} P_{jx} \\ P_{jy} \\ P_{jz} \end{bmatrix}.$$

Для стержня в целом имеем

$$V^{ij} = \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix}; \quad P^{ij} = \begin{bmatrix} P_i^{ij} \\ P_j^{ij} \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Перемещения узла i в местной и общей системах координат свя-заны между собой соотношением

$$\bar{V}_i = \lambda_0 \cdot V_i.$$

Здесь $\lambda_0 = [\lambda_{xx} \quad \lambda_{xy} \quad \lambda_{xz}]$. (1.7)

Для стержня в целом имеем

$$\bar{V} = \lambda \cdot V^{ij}, \quad (1.8)$$

где через λ обозначена матрица преобразования координат для ферменного элемента

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Матрица жесткости ферменного элемента в общей системе ко-ординат вычисляется по формуле

$$K^{ij} = \lambda^T \cdot \bar{K} \cdot \lambda \quad (1.10)$$

и имеет размер 6×6 . В блочной записи она имеет вид

$$K^{ij} = \begin{bmatrix} K_{ii}^{ij} & K_{ij}^{ij} \\ K_{ji}^{ij} & K_{jj}^{ij} \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

где $K_{ii}^{ij} = K_{jj}^{ij} = -K_{ij}^{ij} = -K_{ji}^{ij} = \left(\frac{Ef}{l} \lambda_0^T \cdot \lambda_0 \right)^{ij}$.

Подчеркнем, что матрица жесткости стержня является симмет-ричной.

1.2. Матрица жесткости фермы

Рассмотрим теперь пространственную ферму, отнесенную к произвольной системе координат x, y, z . Предположим, что переме-щения каждого узла i в направлении координатных осей известны и образуют матрицу

$$V_i = \begin{bmatrix} V_{ix} \\ V_{iy} \\ V_{iz} \end{bmatrix}.$$

Проекции внешней силы, приложенной к узлу i , обозначим че-рез, P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} и составим из них матрицу

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \end{bmatrix}.$$

Матрицы узловых сил и перемещений для 0всей фермы будут иметь вид

$$P = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_i \ \dots \ P_m\};$$

$$V = \{V_1 \ V_2 \ \dots \ V_i \ \dots \ V_m\}.$$

Здесь через P и V обозначены матрицы-столбцы. Элементы этих столбцов для удобства записи условно расположены в строку и заключены в фигурные скобки. Через m обозначено число узлов фермы.

Если перемещения V известны, то силы P , необходимые для их создания, определяются по формуле

$$P = K \cdot V \quad (1.12)$$

или

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_i \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1j} & \dots & K_{1m} \\ K_{i1} & \dots & K_{ij} & \dots & K_{im} \\ K_{m1} & \dots & K_{mj} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_j \\ V_m \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

где K – матрица жесткости фермы. Элементами K_{ij} этой матрицы будут подматрицы размера 3×3 , связывающие силы P_i с перемеще-ниями V_j .

Правила формирования подматриц K_{ij} из матриц жесткости раз-розненных элементов (1.11) можно получить, рассматривая урав-нения равновесия, записанные для узлов фермы. Они сводятся к следующему: $K_{ij} = 0$, если узлы i и j не принадлежат одновременно к одному из стержней; $K_{ij} = K_{ij}^{ij}$, если узлы i и j

принадлежат к одному стержню, причем $i \neq j$; $K_{ii} = \sum_{j=q,r,s,t} K_{ii}^{ij}$, где

суммирование производится по всем стержням, сходящимся в узле i .

Практически для получения матрицы жесткости фермы можно все элементы матрицы жесткости каждого стержня

$$K^{ij} = \begin{bmatrix} K_{ii}^{ij} & K_{ij}^{ij} \\ K_{ji}^{ij} & K_{jj}^{ij} \end{bmatrix}$$

поместить в соответствующие ячейки в общей матрице жесткости и произвести затем суммирование всех накладывающихся элементов (для фермы такое наложение появится лишь в диагональных под-матрицах K_{ii}).

1.3. Определение узловых перемещений

При известных нагрузках, приложенных к ферме, равенство (1.12) можно рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно перемещений V .

Если ферма закреплена, то перемещения соответствующих узлов в направлении опорных связей равны нулю, остальные перемещения подлежат отысканию. Компоненты перемещений можно расположить таким образом, чтобы в матрице V сначала перечислялись все неизвестные, а затем – известные (нулевые) перемещения. Тогда матрица V будет представлена в блочной форме

$$V = \begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_\alpha \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

где подматрица V_α содержит только неизвестные перемещения, а подматрица V_β – нулевая. Поскольку порядок перечисления сил в матрице P всегда должен строго соответствовать порядку следова-ния перемещений в матрице V , то можно записать

$$P = \begin{bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

В P_α входят известные внешние силы, действующие в направ-лении перемещений V_α . Подматрица P_β содержит силы, дейст-

вующие по направлению наложенных связей и представляющие собой реакции опор.

Строки и столбцы матрицы жесткости K должны быть расположены в таком же порядке, как перечисляются силы и перемещения в матрицах P и V . В результате матрицу жесткости можно привести к блочному виду, а вместо (1.12) записать

$$\begin{bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_\alpha \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Отсюда следует, что

$$P_\alpha = K_{\alpha\alpha} \cdot V_\alpha. \quad (1.17)$$

Решая уравнение (1.17), можно найти неизвестные перемещения V_α .

Заметим, что практически нет необходимости производить перестановку элементов матриц V , P и K . Для получения так называемых сокращенных матриц V_α , P_α и $K_{\alpha\alpha}$ достаточно в полных матрицах P и V вычеркнуть строки, а в матрице K – строки и столбцы, имеющие номера известных узловых перемещений.

Проиллюстрируем последнее на примере фермы, изображенной на рис. 1.3. Поузловая нумерация перемещений (V_{1x} , V_{1y} , V_{1z} , V_{2x} , V_{2y} , V_{2z} и т.д.) для этой фермы показана на рис. 1.4.

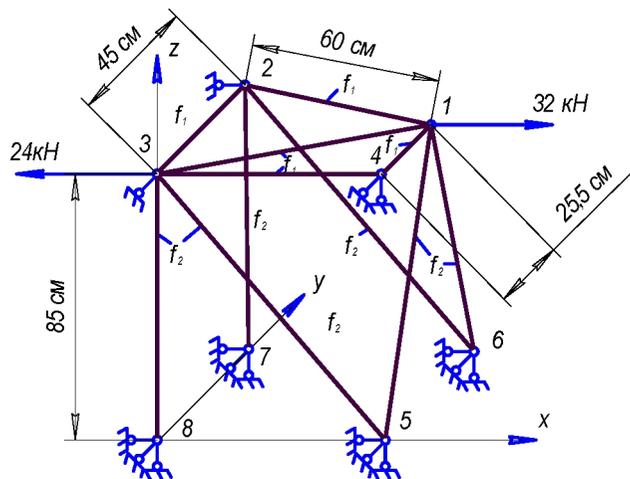


Рис. 1.3. Пространственная ферма

($f_1=2,1\text{см}^2$; $f_2=3,2\text{см}^2$; $E=2\cdot 10^5$ МПа)

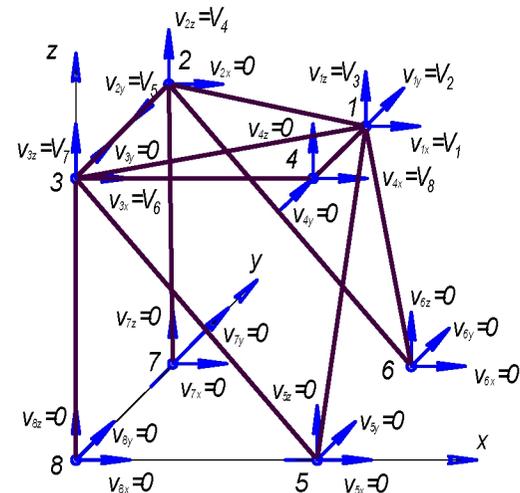


Рис. 1.4. Обозначение узловых перемещений пространственной фермы

Из условий закрепления системы узловые перемещения с индексами $2x$, $3y$, $4y$, $4z$, $5y$, $5z$, $6x$, $6y$, $6z$, $7x$, $7y$, $7z$, $8x$, $8y$, $8z$ равны нулю. Поэтому для получения сокращенных матриц из матриц P и V вычеркиваются строки, а из общей матрицы жесткости K – строки и столбцы, соответствующие этим индексам. Оставшиеся элементы, заштрихованные на рис.1.5, образуют матрицу $K_{\alpha\alpha}$.

Полузловая нумерация перемещений	V																							
	V_{1x}	V_{1y}	V_{1z}	V_{2x}	V_{2y}	V_{2z}	V_{3x}	V_{3y}	V_{3z}	V_{4x}	V_{4y}	V_{4z}	V_{5x}	V_{5y}	V_{5z}	V_{6x}	V_{6y}	V_{6z}	V_{7x}	V_{7y}	V_{7z}	V_{8x}	V_{8y}	V_{8z}
Свободная нумерация перемещений	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}

Полузловая нумерация перемещений	K																							
	V_{1x}	V_{1y}	V_{1z}	V_{2x}	V_{2y}	V_{2z}	V_{3x}	V_{3y}	V_{3z}	V_{4x}	V_{4y}	V_{4z}	V_{5x}	V_{5y}	V_{5z}	V_{6x}	V_{6y}	V_{6z}	V_{7x}	V_{7y}	V_{7z}	V_{8x}	V_{8y}	V_{8z}
Свободная нумерация перемещений	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	K_{16}	K_{17}	K_{18}	K_{19}	K_{110}	K_{111}	K_{112}	K_{113}	K_{114}	K_{115}	K_{116}	K_{117}	K_{118}	K_{119}	K_{120}	K_{121}	K_{122}	K_{123}	K_{124}

ашенных матриц P_α , V_α и $K_{\alpha\alpha}$ для раженной на рис. 1.3

- подготовить исходные данные для расчета фермы на ЭВМ;
- для указанного преподавателем стержня S1 вручную вычислить матрицу жесткости в общей системе координат и составить блок подсуммирования ее элементов в матрицу жесткости конструкции $K_{\alpha\alpha}$;
- для другого стержня S2 составить блок засылки элементов матрицы K^{ij} в матрицу жесткости конструкции $K_{\alpha\alpha}$, предполагая, что матрица K^{ij} вычислена;
- после получения результатов вычислений сделать проверку правильности расчета, составляя уравнения равновесия узлов, указанных преподавателем;
- по найденным на ЭВМ узловым перемещениям вручную определить усилие в стержне S1 и сравнить его с полученным на ЭВМ.

Учебная программа расчета ферм матричным методом перемещений FERMANEW составлена на алгоритмическом языке Си и реализована на персональной ЭВМ типа IBM PC/AT, работающей под управлением операционной системы MS-DOS. Для ее запуска необходимо в командной строке DOS набрать имя программы. При этом в качестве аргумента можно задать имя файла базы данных (без расширения или с расширением dbf). Если имя файла не задано, то после загрузки программы появится приглашение:

Введите имя файла базы данных> __ .dbf

Файл базы данных служит для хранения на диске исходной информации, а также результатов расчета по отдельной задаче. В дальнейшем при повторной работе с настоящей программой данные, записанные в этот файл, можно исправлять и (или) дополнять.

После определения имени файла программа FERMANEW создаст на экране дисплея рабочую страницу, в верхней части которой располагается главное меню, содержащее пять позиций:

Регистрация Исходн.данные Выполнение Результаты Конец

Всем элементам матриц V_{α} и P_{α} присвоена сквозная нумерация (рис. 1.4 и рис. 1.5), что удобно при машинном решении задачи.

Итак, если из уравнения (1.17) перемещения узлов фермы найдены, то для любого ее стержня ij будет известна матрица перемещений V^{ij} в общей системе координат. Применяя (1.8), можно найти перемещения \bar{V} в местных координатах, по (1.2) вычислить узловые силы \bar{P} , а следовательно, и усилия в стержнях фермы.

2. ПРОГРАММА РАСЧЕТА ФЕРМ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

2.1. Общие сведения

В процессе выполнения расчетной работы студент должен проделать следующее:

Выбор опции в этом меню осуществляется с помощью стрелок <Вправо>, <Влево> или манипулятора "мышь" с последующим нажатием клавиши ввода <Enter> или левой кнопки мыши.

2.2. Исходная информация

Прежде всего, необходимо выбрать первый пункт меню "Регистрация" и в соответствующие поля ввести свою фамилию, номер группы и варианта.

Регистрация	
Фамилия	Петров
Группа	134
Вариант	12

После регистрации можно вводить исходные данные, для чего выбирается одноименный пункт главного меню. При этом появляется подменю, содержащее девять строк:

Выход
Характеристики материалов
Площади сечений
Информация для узлов
Информация для стержней
Узловые силы
Стержень S1
Стержень S2
Контроль исходных данных

Здесь выбор опции осуществляется с помощью стрелок <Вниз>, <Вверх> и клавиши <Enter> или же с использованием мыши. Отметим, что первый пункт этого подменю служит для возвращения в главное меню.

Все исходные данные для фермы разбиты на семь групп, причем каждой группе соответствует отдельный пункт подменю "Исходн. данные". Большинство данных готовится в виде таблиц. При этом установка маркера на нужную позицию в таблице производится при помощи стрелок, клавиш <End>, <Home> или манипулятором "мышь". Для получения справочной информации по вводу предусмотрена клавиша помощи <F1>.

2.2.1. **Характеристики материалов.** При выборе соответствующего пункта подменю на экране дисплея появляется таблица для задания модулей упругости материалов и запрос на ввод числа различных материалов.

Для фермы, изображенной на рис. 1.3, число различных материалов равно 1, так как все стержни изготовлены из одного материала с $E=2 \cdot 10^5$ МПа (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Ввод характеристик материалов

Номер материала	Модуль упругости, МПа
1	200000

2.2.2. **Площади сечений.** Для этой группы данных на экране дисплея также появляется соответствующая таблица и запрос на ввод числа различных сечений.

Для рассматриваемой задачи (рис. 1.3) число различных сечений равно 2, так как в ферме встречаются только два типа сечений стержней: $f_1=2,1\text{см}^2$ и $f_1=3,2\text{см}^2$. Эти данные представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Ввод площадей сечений

Номер сечения	Площадь сечения, мм ²
1	210
2	320

2.2.3. **Информация для узлов.** Отметим, что всем узлам фермы необходимо присвоить порядковые номера, причем для лучшей обозримости матрицы $K_{\alpha\alpha}$ в матрице жесткости фермы K рекомендуется сначала пронумеровать свободные (подвижные) узлы, потом – частично закрепленные, а в конце – полностью закрепленные.

Таблица с информацией для узлов содержит координаты и матрицу нумерации перемещений узлов (табл. 2.3). Перед заполнением этой таблицы необходимо задать число узлов (для рассматриваемой фермы – 8)

Таблица 2.3

Ввод информации для узлов

Номер узла	Координаты узла, мм			Номера перемещений узла		
	x	y	z	V_x	V_y	V_z
1	600	225	850	1	2	3
2	0	450	850	0	4	5
3	0	0	850	6	0	7
4	600	0	850	8	0	0
5	600	0	0	0	0	0
6	600	450	0	0	0	0
7	0	450	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0

Рассмотрим заполнение матрицы нумерации перемещений узлов на примере 3-го узла. Для данного узла $V_{ix}=V_6$, $V_{iy}=0$, $V_{iz}=V_7$ (рис. 1.4).

В матрицу (правая часть табл. 2.3) записываются только номера неизвестных перемещений, а буква V опускается. В соответствии с этим для 3-го узла строка нумерации перемещений будет иметь вид:

6 0 7

2.2.4. Информация для стержней. Стержням фермы также присваиваются порядковые номера (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Нумерация стержней фермы

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Обозначение стержня	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	2-3	2-6	2-7	3-4	3-5	3-8

Ввод данных для этой группы начинается с задания числа стержней. В нашем случае число стержней равно 11. Затем в появившуюся на экране дисплея таблицу для каждого стержня необходимо ввести номера принадлежащих ему узлов, тип материала и тип сечения (табл. 2.5). Отметим, что тип материала (или сечения) есть его порядковый номер в табл. 2.1 (или в табл. 2.2).

Таблица 2.5

Ввод информации для стержней

Номер стержня	Номера узлов		Тип матер. стержня	Тип сечения стержня
	i	j		
1	1	2	1	1

2	1	3	1	1
3	1	4	1	1
4	1	5	1	2
5	1	6	1	2
6	2	3	1	1
7	2	6	1	2
8	2	7	1	2
9	3	4	1	1
10	3	5	1	2
11	3	8	1	2

2.2.5. Узловые силы. Таблица узловых сил содержит элементы сокращенной матрицы узловых сил P_{α} , количество которых равно числу неизвестных перемещений фермы NEQ. Порядок перечисления сил должен соответствовать сквозной нумерации узловых перемещений.

При этом проекции сил на координатные оси следует брать с учетом знака. Отметим, что число неизвестных перемещений определяется по табл. 2.3 (в нашем случае NEQ=8). Поэтому перед вводом узловых сил необходимо задать информацию для узлов.

Для рассматриваемого примера данные по узловым силам приведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Ввод узловых сил

Номер силы	Сила, Н
1	32000
2	0
3	0
4	0
5	0
6	-24000
7	0
8	0

2.2.6. Стержень S1. Формирование сокращенной матрицы жесткости фермы $K_{\alpha\alpha}$ организовано в программе автоматически с помощью так называемой матрицы индексов [4]. Матрица индексов для каждого стержня устанавливает соответствие между поузловой и сквозной нумерациями перемещений с учетом условий закрепления фермы и записывается в виде шести чисел (число степеней свободы ферменного элемента в общей системе координат). Первые три числа относятся к начальному узлу i стержня, а последние три – к конечному узлу j и представляют собой номера

перемещений соответствующих узлов. При этом каждый элемент матрицы индексов указывает, по каким адресам матрицы $K_{\alpha\alpha}$ надо занести элементы матрицы жесткости стержня K^{ij} . Матрицы $K_{\alpha\alpha}$ и K^{ij} в памяти ЭВМ представляются как двумерные массивы GK(NEQ,NEQ) и GE(6,6) соответственно.

Рассмотрим стержень № 6 (2-3). Матрица индексов для него имеет вид 0 4 5 6 0 7. Пронумеруем строки и столбцы матрицы жесткости K^{ij} согласно последовательности этих чисел (рис. 2.1). Нули в матрице индексов показывают, что отмеченные ими строки и столбцы матрицы жесткости стержня не участвуют в формировании $K_{\alpha\alpha}$ (на рис. 2.1 эти члены не пронумерованы). Так, например, элемент матрицы жесткости стержня, выделенный на рис. 2.1 жирной линией, должен быть занесен по адресу: пятая строка, шестой столбец матрицы $K_{\alpha\alpha}$.

Как уже было сказано выше, из методических соображений в разработанной программе предусмотрено составление студентами для своей фермы блоков подсуммирования для стержней S1 и S2.

	0	4	5	6	0	7	
0							
4		GE(2,2)	GE(2,3)	GE(2,4)		GE(2,6)	GK(5,6)
5		GE(3,2)	GE(3,3)	GE(3,4)		GE(3,6)	
6		GE(4,2)	GE(4,3)	GE(4,4)		GE(4,6)	
0							
7		GE(6,2)	GE(6,3)	GE(6,4)		GE(6,6)	

Рис. 2.1. Засылка элементов матрицы K^{ij} (массив GE) в матрицу $K_{\alpha\alpha}$ (массив GK) с помощью матрицы индексов

Для стержня S1 студентом вручную вычисляется матрица жесткости K^{ij} в общей системе координат по формулам (1.11). Элементы этой матрицы затем следует подсуммировать к соответствующим элементам матрицы жесткости конструкции $K_{\alpha\alpha}$, представленной в памяти ЭВМ в виде массива GK(NEQ,NEQ).

Пусть, к примеру, номер стержня S1 равен 9 (3-4). Для него матрица жесткости имеет вид:

$$K^{ij} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -7 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 7 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Ее строки и столбцы пронумерованы в соответствии со значениями строки матрицы индексов для стержня 3 - 4 (табл. 2.3).

При вводе данных для стержня S1 сначала задается его номер NS1, а затем заполняется соответствующий блок подсуммирования (см. рис. 2.2, где представлены данные для стержня № 9).

GK (6, 6)	=	GK (6, 6)	+	(70000.00)
GK (6, 8)	=	GK (6, 8)	+	(-70000.00)
GK (8, 8)	=	GK (8, 8)	+	(70000.00)
GK (,)	=	GK (,)	+	()
		.		
GK (,)	=	GK (,)	+	()

Рис. 2.2. Ввод для стержня S1

Отметим, что в силу симметрии матрицы жесткости в массив GK здесь заносится только часть членов, лежащих на главной диагонали и выше (т.е. первый индекс в массиве должен быть меньше или равен второму).

2.2.7. **Стержень S2.** Для стержня S2 осуществляется засылка элементов матрицы жесткости стержня K^{ij} в матрицу жесткости фермы $K_{\alpha\alpha}$ в предположении, что матрица жесткости стержня уже вычислена и размещается в массиве GE (6,6).

Ввод данных здесь также начинается с задания номера стержня NS2, после чего заполняется блок засылки элементов матрицы жесткости.

Рассмотрим, например, стержень № 6 (рис. 2.1). Для него данные показаны на рис. 2.3.

GK (4, 4) =	GK (4, 4) +	GE (2, 2)
GK (4, 5) =	GK (4, 5) +	GE (2, 3)
GK (4, 6) =	GK (4, 6) +	GE (2, 4)
GK (4, 7) =	GK (4, 7) +	GE (2, 6)
GK (5, 5) =	GK (5, 5) +	GE (3, 3)
GK (5, 6) =	GK (5, 6) +	GE (3, 4)
GK (5, 7) =	GK (5, 7) +	GE (3, 6)
GK (6, 6) =	GK (6, 6) +	GE (4, 4)
GK (6, 7) =	GK (6, 7) +	GE (4, 6)
GK (7, 7) =	GK (7, 7) +	GE (6, 6)
GK (,) =	GK (,) +	GE (,)
	⋮	
	⋮	
	⋮	
GK (,) =	GK (,) +	GE (,)

Рис. 2.3. Ввод для стержня S2

Отметим, что для стержня S2 так же, как и для стержня S1, устанавливается соответствие для верхних треугольников матриц жесткости.

2.2.8. Контроль исходных данных. Он заключается в вычерчивании на экране дисплея фермы в различных проекциях. Причем здесь показываются имеющиеся закрепления и сосредоточенные силы, а также предусмотрена возможность включения/выключения нумерации узлов и стержней фермы.

2.3. Решение задачи

Для запуска сформированной задачи на счет необходимо выбрать в главном меню команду "Выполнение". При этом сначала осуществляется проверка исходных данных. В случае обнаружения ошибок решение прекращается, а на экране дисплея появляется сообщение, в котором перечисляются содержащиеся ошибки группы данных.

Блок-схема программного модуля, непосредственно выполняющего решение фермы матричным методом перемещений, приведена на рис. 2.4. Отметим основные особенности програм-

мы. В процессе решения сразу формируется сокращенная матрица жесткости фермы $K_{\alpha\alpha}$. Однотипные вычисления осуществляются циклически. Число циклов определяется количеством стержней фермы NE. Текущий номер стержня обозначен через N. Формирование матрицы $K_{\alpha\alpha}$ организовано в программе автоматически в блоке 6 с помощью матрицы индексов. Для обеспечения более глубокой проработки студентами такого узлового вопроса матричного метода перемещений, как формирование матрицы жесткости конструкции, в программе предусмотрено для двух стержней с номерами NS1 и NS2 составление блоков, осуществляющих засылку элементов матриц жесткости стержней в матрицу $K_{\alpha\alpha}$. Результаты этих засылок сравниваются в блоке 15 с результатом автоматического формирования матрицы $K_{\alpha\alpha}$, и в случае их совпадения вычисления продолжают. В противном случае на экран дисплея выдается сообщение об ошибке и решение прекращается.

2.4. Анализ результатов расчета

После успешного решения задачи следует выбрать в главном меню пункт "Результаты". При этом появляется вспомогательное подменю, имеющее следующие строки:

Выход
Просмотр
Печать
Деформации фермы

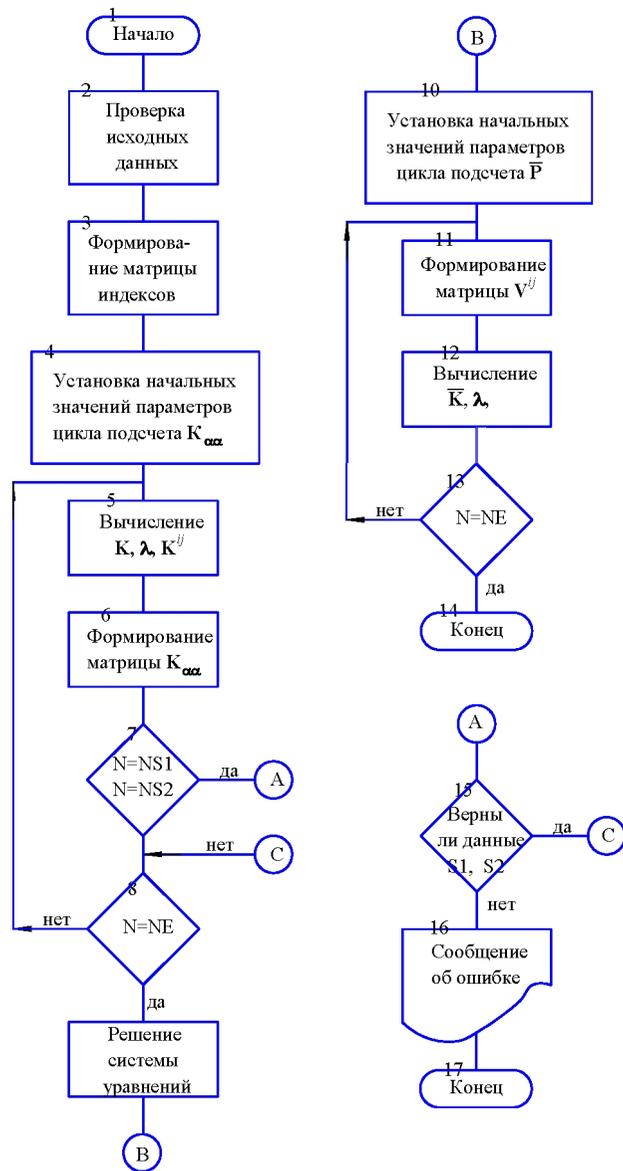


Рис. 2.4. Блок - схема программы

Результат расчета можно вывести на экране дисплея (команда «Просмотр») или на принтер (команда «Печать»). Кроме того, выбрав пункт подменю «Деформации фермы», можно увидеть на экране дисплея исходное и деформированное состояние фермы.

Для завершения работы с программой FERMANEW необходимо задать в главном меню команду «Конец».

С целью более глубокого изучения материала студент должен после решения задачи на ЭВМ по найденным значениям узловых перемещений вручную подсчитать усилие в стержне S1, для которого ранее вычислялась матрица жесткости в общей системе координат. Для контроля правильности решения задачи составляются уравнения равновесия заданных преподавателем узлов фермы.

Распечатка результатов расчета на ЭВМ фермы, изображенной на рис.1.3, представлена в приложении.

Библиографический список

1. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. - М.: Мир, 1975. - 542с.
2. Расчет ферм матричным методом перемещений на ЭВМ: метод. указания/ сост. В.И. Леонов; Куйбышев. авиац. ин-т. - Куйбышев, 1983. - 32с.
3. Образцов, И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов /И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов. - М.: Высшая школа, 1985. - 392с.
4. Постнов, В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В.А. Постнов, И.Я. Хархурим. - Л.: Судостроение, 1974. - 334с.

Приложение

Распечатка результатов расчета для рассматриваемой фермы

Петров Группа 134 Вариант 12
 Число стержней фермы 11
 Число узлов 8
 Модули упругости материалов
 200000
 Площади сечений стержней
 210.0 320.0
 Номер стержня S1 – 9 Номер стержня S2 – 6

Номер узла	Координаты			Номера перемещений		
	X	Y	Z	U	V	W
1	600.00	225.00	850.00	1	2	3
2	0.00	450.00	850.00	0	4	5
3	0.00	0.00	850.00	6	0	7
4	600.00	0.00	850.00	8	0	0
5	600.00	0.00	0.00	0	0	0
6	600.00	450.00	0.00	0	0	0
7	0.00	450.00	0.00	0	0	0
8	0.00	0.00	0.00	0	0	0

Номер стержня	Номера узлов	Тип матер.	Тип сечения
1	1 - 2	1	1
2	1 - 3	1	1
3	1 - 4	1	1
4	1 - 5	1	2
5	1 - 6	1	2
6	2 - 3	1	1
7	2 - 6	1	2
8	2 - 7	1	2
9	3 - 4	1	1
10	3 - 5	1	2
11	3 - 8	1	2

Матрица узловых сил				
32000.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-24000.00	0.00	0.00		

Окончание приложения

Подсуммирование элементов МЖ стержня S1 в МЖ фермы

GK (6, 6) =	GK (6, 6) +	(70000.00)
GK (6, 8) =	GK (6, 8) +	(-70000.00)
GK (8, 8) =	GK (8, 8) +	(70000.00)

Засылка элементов МЖ стержня S2 в МЖ фермы

GK (4, 4) =	GK (4, 4) +	GE (2, 2)
GK (4, 5) =	GK (4, 5) +	GE (2, 3)
GK (4, 6) =	GK (4, 6) +	GE (2, 4)
GK (4, 7) =	GK (4, 7) +	GE (2, 6)
GK (5, 5) =	GK (5, 5) +	GE (3, 3)
GK (5, 6) =	GK (5, 6) +	GE (3, 4)
GK (5, 7) =	GK (5, 7) +	GE (3, 6)
GK (6, 6) =	GK (6, 6) +	GE (4, 4)
GK (6, 7) =	GK (6, 7) +	GE (4, 6)
GK (7, 7) =	GK (7, 7) +	GE (6, 6)

Узловые перемещения

0.191113	-0.020940	0.000000	-0.042276	0.000000
0.190513	-0.047453	-0.190513		

Узловые силы в стержнях

Стержень	P_i	P_j
1	-11237.586	11237.586
2	-22938.429	22938.429
3	3908.831	-3908.831
4	390.025	-390.025
5	-390.025	390.025
6	3945.780	-3945.780
7	0.000	0.000
8	0.000	0.000
9	0.000	0.000
10	-4373.423	4373.423
11	3572.946	-3572.946

Примечание: Элементы матрицы \bar{P} для каждого стержня располагаются в строку. Если значение первого элемента получено со знаком "минус", то стержень растянут, в противном случае стержень будет

сжат.

СОДЕРЖАНИЕ

1. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАСЧЕТУ

ФЕРМ.....	4	
1.1. Матрица жесткости ферменного элемента.....	4	ферменного
1.2. Матрица жесткости фермы.....	6	жесткости
1.3. Определение узловых перемещений.....	8	узловых
2. ПРОГРАММА РАСЧЕТА ФЕРМ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.....	11	
2.1. Общие сведения.....	11	Общие
2.2. Исходная информация.....	13	Исходная
2.3. Решение задачи.....	19	Решение
2.4. Анализ результатов расчета.....	20	результатов
Библиографический список.....	23	
Приложение.....	24	

Учебное издание

**РАСЧЕТ ФЕРМ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ЭВМ**

Методические указания к курсовой и расчетной работе

Составители: Леонов Виктор Иванович,
Скворцов Юрий Васильевич

Редактор Т.И. Кузнецова
Компьютерная верстка О.А. Ананьев

Подписано в печать 25.12.2007 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,75.
Тираж 200 экз. Заказ Арг. С - 22/2007

Самарский государственный аэрокосмический
университет. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

